BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2015

УДК 517.95

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

А.А.МАМЕДОВ
Бакинский Государственный Университет
mammedov1@mail.ru

В данной работе изучается задача рассеяния на полуоси для гиперболической системы пяти уравнений первого порядка при совместном рассмотрении трех задач с различными граничными условиями.

Ключевые слова: задача рассеяния, обратная задача, падающие волны, рассеянные волны, оператор рассеяния.

Рассмотрим на полуоси $x \geq 0$ гиперболическую систему уравнений вида

$$\xi_i \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{5} C_{ij}(x,t) u_j(x,t),\ i = \overline{1,5}, \qquad (1)$$

где коэффициенты $C_{ij}(x,t)$ – комплекснозначные, измеримые по (x,t) функции, удовлетворяющие оценкам

$$\left|C_{ij}(x,t)\right| \leq C\left[(1+|x|)(1+|t|)\right]^{-1-\varepsilon},\ i,j = \overline{1,5},\ \varepsilon > 0,\ c > 0,\ \varepsilon = const,\ \ c = const, \qquad (2)$$

$$\xi_1 > \xi_2 > \xi_3 > 0 > \xi_4 > \xi_5,\ -\infty < t < +\infty.$$

Обратная нестационарная задача рассеяния на всей оси для гиперболической системы уравнений первого порядка исследована в работах Л.П.Нижника [1] при $n = 2$, где n - число уравнений системы, Л.П.Нижника и В.Г.Тарасова [2, 3] при $n \geq 3$. Указанная задача на полуоси исследована в работах Л.П.Нижника [2] при $n = 2$, Л.П.Нижника и Н.Ш.Искендерова [3], Н.Ш.Искендерова [4] при $n \geq 3$ в случае наличия $(n-1)$-ой, либо одной падающей волны, Н.Ш.Искендерова и М.И.Исмаилова [5], М.И.Исмаилова [6] для системы четырех гиперболических уравнений первого порядка с двумя заданными падающими волнами, для системы из $2n$ уравнений при равных падающих и рассеянных волнах.

Отметим также, что в [7] проведено исследование на полуоси системы пяти гиперболических уравнений с двумя падающими волнами в случаях отсутствия первой либо второй взаимодействующих волн при совместном рассмотрении трех задач.

В отличие от работы [7] в данной статье проведено исследование на полуоси для системы пяти гиперболических уравнений с тремя падающими волнами.

1. Задача рассеяния. Для системы (1) на полуоси рассматриваются три задачи.

Первая задача состоит в нахождении решения системы (1), удовлетворяющего граничному условию

$$\begin{aligned} &u_4^1(0,t) = u_1^1(0,t) + u_2^1(0,t); \\ &u_5^1(0,t) = u_3^1(0,t), \end{aligned} \tag{3}$$

по заданным падающим волнам $a_1(s),\ a_2(s) \in L_\infty(R) \quad (R = (-\infty, +\infty))$, определяющим в $L_\infty(R)$ асимптотику решений $u_1^1(x,t),\ u_2^1(x,t),\ u_3^1(x,t),$ вида

$$u_k^1(x,t) = a_k(t + \xi_k x) + o(1),\ x \to +\infty,\ k = 1,2,3. \tag{4}$$

Вторая задача состоит в нахождении решения системы (1), удовлетворяющего граничному условию

$$\begin{aligned} &u_4^2(0,t) = u_1^2(0,t) + u_3^2(0,t); \\ &u_5^2(0,t) = u_2^2(0,t), \end{aligned} \tag{5}$$

по заданным падающим волнам $a_1(s),\ a_2(s),\ a_3(s) \in L_\infty(R)$, определяющим в $L_\infty(R)$ асимптотику решений $u_1^2(x,t),\ u_2^2(x,t),\ u_3^2(x,t),$ вида

$$u_k^2(x,t) = a_k(t + \xi_k x) + o(1),\ x \to +\infty,\ k = 1,2,3. \tag{6}$$

Третья задача состоит в нахождении решения системы (1), удовлетворяющего граничному условию

$$\begin{aligned} &u_4^3(0,t) = u_2^3(0,t) + u_3^3(0,t); \\ &u_5^3(0,t) = u_1^3(0,t), \end{aligned} \tag{7}$$

по заданным падающим волнам $a_1(s),\ a_2(s),\ a_3(s) \in L_\infty(R)$, определяющим в $L_\infty(R)$ асимптотику решений $u_1^3(x,t),\ u_2^3(x,t),\ u_3^3(x,t),$ вида

$$u_k^3(x,t) = a_k(t + \xi_k x) + o(1),\ x \to +\infty,\ k = 1,2,3. \tag{8}$$

Совместное рассмотрение этих трех задач представляет собой задачу рассеяния для системы (1) на полуоси.

Задача рассеяния для системы (1) на полуоси эквивалентна следующей системе интегральных уравнений

$$
\begin{aligned}
u_1^p(x,t) &= a_1(t+\xi_1 x) + \int_x^{+\infty} \sum_{j=1}^{5} C_{1j}\big(y, t+\xi_1(x-y)\big) u_j^p\big(y, t+\xi_1(x-y)\big) dy, \\
u_2^p(x,t) &= a_2(t+\xi_2 x) + \int_x^{+\infty} \sum_{j=1}^{5} C_{2j}\big(y, t+\xi_2(x-y)\big) u_j^p\big(y, t+\xi_2(x-y)\big) dy, \\
u_3^p(x,t) &= a_3(t+\xi_3 x) + \int_x^{+\infty} \sum_{j=1}^{5} C_{3j}\big(y, t+\xi_3(x-y)\big) u_j^p\big(y, t+\xi_3(x-y)\big) dy, \\
u_4^p(x,t) &= b_4^p(t+\xi_4 x) + \int_x^{+\infty} \sum_{j=1}^{5} C_{4j}\big(y, t+\xi_4(x-y)\big) u_j^p\big(y, t+\xi_4(x-y)\big) dy, \\
u_5^p(x,t) &= b_5^p(t+\xi_5 x) + \int_x^{+\infty} \sum_{j=1}^{5} C_{5j}\big(y, t+\xi_5(x-y)\big) u_j^p\big(y, t+\xi_5(x-y)\big) dy,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где

$$
\begin{aligned}
b_4^1(t) &= a_1(t) + a_2(t) + \sum_{j=1}^{5} \int_0^{+\infty} \Big[C_{1j}(y, t-\xi_1 y) u_j^1(y, t-\xi_1 y) + \\
&+ C_{2j}(y, t-\xi_2 y) u_j^1(y, t-\xi_2 y) - C_{4j}(y, t-\xi_4 y) u_j^1(y, t-\xi_4 y) \Big] dy, \\
b_5^1(t) &= a_3(t) + \sum_{j=1}^{5} \int_0^{+\infty} \Big[C_{3j}(y, t-\xi_3 y) u_j^1(y, t-\xi_3 y) - \\
&- C_{5j}(y, t-\xi_5 y) u_j^1(y, t-\xi_5 y) \Big] dy, \\
b_4^2(t) &= a_1(t) + a_3(t) + \sum_{j=1}^{5} \int_0^{+\infty} \Big[C_{1j}(y, t-\xi_1 y) u_j^2(y, t-\xi_1 y) + \\
&+ C_{3j}(y, t-\xi_3 y) u_j^2(y, t-\xi_3 y) - C_{4j}(y, t-\xi_4 y) u_j^2(y, t-\xi_4 y) \Big] dy, \\
b_5^2(t) &= a_2(t) + \sum_{j=1}^{5} \int_0^{+\infty} \Big[C_{2j}(y, t-\xi_2 y) u_j^2(y, t-\xi_2 y) - \\
&- C_{5j}(y, t-\xi_5 y) u_j^2(y, t-\xi_5 y) \Big] dy, \\
b_4^3(t) &= a_2(t) + a_3(t) + \sum_{j=1}^{5} \int_0^{+\infty} \Big[C_{2j}(y, t-\xi_2 y) u_j^3(y, t-\xi_2 y) + \\
&+ C_{3j}(y, t-\xi_3 y) u_j^3(y, t-\xi_3 y) - C_{4j}(y, t-\xi_4 y) u_j^3(y, t-\xi_4 y) \Big] dy, \\
b_5^3(t) &= a_1(t) + \sum_{j=1}^{5} \int_0^{+\infty} \Big[C_{1j}(y, t-\xi_1 y) u_j^3(y, t-\xi_1 y) - \\
&- C_{5j}(y, t-\xi_5 y) u_j^3(y, t-\xi_5 y) \Big] dy.
\end{aligned}
$$

Используя оценки (2) нетрудно убедиться в том, что для любых заданных падающих волн $a_1(s), a_2(s), a_3(s) \in L_\infty(R)$ задача рассеяния для первой, второй и третьей задач имеет единственное решение и каждое решение допускает асимптотику в пространстве $L_\infty(R)$:

$$u_m^p(x,t) = b_m^p(t+\xi_m x) + o(1),\ x \to +\infty,\ m = 4,5;\ p = 1,2,3. \tag{10}$$

Действительно, используя неравенство (2) из (9)

$$\left\| u_m^p(x,t) - b_m^p(t+\xi_m x) \right\| =$$

$$= \left| \int_x^{+\infty} \sum_{j=1}^{5} C_{mj}(y, t+\xi_m(x-y)) u_j^p(y, t+\xi_m(x-y)) dy \right| \le$$

$$\le M \sum_{j=1}^{5} \int_x^{+\infty} \left| C_{mj}(y, t+\xi_m(x-y)) \right| dy \le$$

$$\le M \sum_{j=1}^{5} \int_x^{+\infty} \frac{C}{(1+|y|)^{1+\varepsilon} (1+|t+\xi_m(x-y)|)^{1+\varepsilon}} dy \le$$

$$\le M \sum_{j=1}^{5} \int_x^{+\infty} \frac{C}{(1+|y|)^{1+\varepsilon}} dy = 5MC \int_x^{+\infty} \frac{C}{(1+|y|)^{1+\varepsilon}} dy =$$

$$= 5MC \frac{(1+|y|)^{-\varepsilon}}{-\varepsilon} \Big|_x^{\infty} = \frac{5MC}{\varepsilon} \frac{1}{(1+x)^{\varepsilon}} \qquad (x > 0).$$

Отсюда при $x \to +\infty$, мы получаем отношение (10).

Здесь использовались неравенства

$$\frac{1}{(1+|t+\xi_m(x-y)|)^{1+\varepsilon}} < 1,$$

$$\left| u_j^p(t, t+\xi_m(x-y)) \right| \le M .$$

Таким образом, можно определить операторы S^k, переводящие $a_1(s), a_2(s), a_3(s) \in L_\infty(R, C^3)$ в $\left(b_4^k(t), b_5^k(t)\right) \in L_\infty(R, C^2),\ k = 1,2,3$.

Оператор $S = (S^1, S^2, S^3)$ будем называть оператором рассеяния для системы (1) на полуоси, где

$$S^k = \begin{pmatrix} S_{11}^k & S_{12}^k & S_{13}^k \\ S_{21}^k & S_{22}^k & S_{23}^k \end{pmatrix},\ k = 1,2,3. \tag{11}$$

2. Интегральные представления решений.

При решении обратной задачи важную роль играют интегральные представления решений, которые выражаются через компоненты следующих функций:

$$
\begin{aligned}
&h^1(t)=\{u_1(0,t),u_2(0,t),u_3(0,t),u_4(0,t),u_5(0,t)\},\\
&h^2(t)=\{a_1(t),u_2(0,t),u_3(0,t),u_4(0,t),u_5(0,t)\},\\
&h^3(t)=\{a_1(t),a_2(t),u_3(0,t),u_4(0,t),u_5(0,t)\},\\
&h^4(t)=\{a_1(t),a_2(t),a_3(t),u_4(0,t),u_5(0,t)\},\\
&h^5(t)=\{a_1(t),a_2(t),a_3(t),b_4(t),u_5(0,t)\},\\
&h^6(t)=\{a_1(t),\ a_2(t),a_3(t),\ b_4(t),\ b_5(t)\},\\
&h^7(t)=\{u_1(0,t),\ a_2(t),a_3(t),\ b_4(t),\ b_5(t)\},\\
&h^8(t)=\{u_1(0,t),\ u_2(0,t),a_3(t),\ b_4(t),\ b_5(t)\},\\
&h^9(t)=\{u_1(0,t),\ u_2(0,t),u_3(0,t),\ b_4(t),\ b_5(t)\},\\
&h^{10}(t)=\{u_1(0,t),\ u_2(0,t),u_3(0,t),\ u_4(0,t),\ b_5(t)\}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Лемма 1. Пусть коэффициенты системы (1) удовлетворяют условию (2). Тогда существует ограниченное решение системы (1), допускающее следующие интегральные представления $(i=1,2,\ldots 5)$:

$$u_i(x,t)=h_i^1(t+\xi_i x)+\int_{t+\xi_5 x}^{t+\xi_1 x}\sum_{j=1}^{5}A_{ij}^1(x,t,s)h_j^1(s)ds, \tag{13_1}$$

$$u_i(x,t)=h_i^2(t+\xi_i x)+\int_{-\infty}^{t+\xi_1 x}A_{i1}^2(x,t,s)h_1^2(s)ds+\int_{-\infty}^{t+\xi_2 x}\sum_{j=2}^{5}A_{ij}^2(x,t,s)h_j^2(s)ds, \tag{13_2}$$

$$u_i(x,t)=h_i^3(t+\xi_i x)+\int_{-\infty}^{+\infty}A_{i1}^3(x,t,s)h_1^3(s)ds+\int_{-\infty}^{t+\xi_2 x}A_{ij}^3(x,t,s)h_2^3(s)ds+$$
$$+\int_{-\infty}^{t+\xi_3 x}\sum_{j=3}^{5}A_{ij}^3(x,t,s)h_j^3(s)ds, \tag{13_3}$$

$$u_i(x,t)=h_i^4(t+\xi_i x)+\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=1}^{2}A_{ij}^4(x,t,s)h_j^4(s)ds+\int_{-\infty}^{t+\xi_3 x}A_{ij}^4(x,t,s)h_3^4(s)ds+$$
$$+\int_{-\infty}^{t+\xi_4 x}\sum_{j=4}^{5}A_{ij}^4(x,t,s)h_j^4(s)ds, \tag{13_4}$$

$$u_i(x,t)=h_i^5(t+\xi_i x)+\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=1}^{3}A_{ij}^5(x,t,s)h_j^5(s)ds+\int_{-\infty}^{t+\xi_4 x}A_{i4}^5(x,t,s)h_4^5(s)ds+$$

$$+\int_{-\infty}^{t+\xi_5 x} A_{i5}^5(x,t,s)h_5^5(s)ds, \qquad (13_5)$$

$$u_i(x,t)=h_i^6(t+\xi_i x)+\int_{t+\xi_1 x}^{+\infty} A_{i1}^6(x,t,s)h_1^6(s)ds+\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=2}^{4} A_{ij}^6(x,t,s)h_j^6(s)ds+$$

$$+\int_{-\infty}^{t+\xi_5 x} A_{i5}^5(x,t,s)h_5^6(s)ds, \qquad (13_6)$$

$$u_i(x,t)=h_i^7(t+\xi_i x)+\int_{t+\xi_1 x}^{+\infty} A_{i1}^7(x,t,s)h_1^7(s)ds+\int_{t+\xi_2 x}^{+\infty} A_{i2}^7(x,t,s)h_2^7(s)ds+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=3}^{5} A_{ij}^7(x,t,s)h_j^7(s)ds, \qquad (13_7)$$

$$u_i(x,t)=h_i^8(t+\xi_i x)+\int_{t+\xi_2 x}^{+\infty}\sum_{j=1}^{2} A_{ij}^8(x,t,s)h_j^8(s)ds+\int_{t+\xi_3 x}^{+\infty} A_{i3}^8(x,t,s)h_3^8(s)ds+$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=4}^{5} A_{ij}^8(x,t,s)h_j^8(s)ds, \qquad (13_8)$$

$$u_i(x,t)=h_i^9(t+\xi_i x)+\int_{t+\xi_3 x}^{+\infty}\sum_{j=1}^{3} A_{ij}^9(x,t,s)h_j^9(s)ds+\int_{t+\xi_4 x}^{+\infty} A_{i4}^9(x,t,s)h_4^9(s)ds+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} A_{i5}^9(x,t,s)h_5^9(s)ds, \qquad (13_9)$$

$$u_i(x,t)=h_i^{10}(t+\xi_i x)+\int_{t+\xi_4 x}^{+\infty}\sum_{j=1}^{4} A_{ij}^{10}(x,t,s)h_j^{10}(s)ds+\int_{t+\xi_5 x}^{+\infty} A_{i5}^{10}(x,t,s)h_5^{10}(s)ds. \qquad (13_{10})$$

Ядра этих преобразований при фиксированных x суммируемы с квадратом по (t,s), то есть являются ядрами Гильберта-Шмидта, однозначно определяющимися коэффициентами $C_{ik}(x,t)$ $\left(i,k=\overline{1,5}\right)$.

Доказательство леммы аналогично методу, описанному в работе [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Нижник Л.П. Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений – Киев: Наук. думка, 1991, 232 с.
2. Нижник Л.П., Тарасов В.Г. Обратная нестационарная задача рассеяния для гиперболической системы уравнений // ДАН СССР, 1977, т.233, № 3, с.300-303.
3. Нижник Л.П., Искендеров Н.Ш. Обратная нестационарная задача рассеяния для гиперболической системы трех уравнений первого порядка на полуоси // Укр.мат.журн., 1990, т.42, № 7, с. 931-938.
4. Искендеров Н.Ш. Обратная задача рассеяния для гиперболической системы n уравнений первого порядка на полуоси // Укр.мат.журн., 1991, т.43, № 12, с. 1638-1646.

5. Искендеров Н.Ш., Исмаилов М.И. Обратная нестационарная задача рассеяния для гиперболической системы четырех уравнений первого порядка на полуоси // Труды ИММ АН Азербайджана, 1996, IV (XII), с. 161-168.
6. Ismailov M.I. Inverse Scattering Problem for Hyperbolic Systems on a Semi-Axis in the Case of Equal Number of Incident and Scattering Waves // Inverse problems, 22, 2006, p. 955-974.
7. Iskenderov N.Sh., Jabbarova K.A. The Inverse Scattering Problem for the System of Five First Order Hyperbolic Equations on Semi-Axis // Transactions of NASA, 2005, v. XXV, No 7, p. 41-54.

BİRTƏRTİBLİ HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ÜÇÜN YARIMOXDA SƏPİLMƏ MƏSƏLƏSİ

A.A.MƏMMƏDOV

XÜLASƏ

Bu işdə birtərtibli beş hiperbolik tənliklər sistemi üçün müxtəlif sərhəd şərtli üç məsələyə birlikdə baxdıqda yarımoxda səpilmə məsələsi öyrənilir.

Açar sözlər: səpilmə məsələsi, tərs məsələ, gələn dalğalar, səpilən dalğalar, səpilmə operatoru.

THE SCATTERING PROBLEM FOR THE SYSTEM OF FIRST ORDER HYPERBOLIC EQUATIONS ON THE SEMI-AXIS

A.A.MAMMADOV

SUMMARY

The paper studies the scattering problem for the system of five first order hyperbolic equations under joint consideration of three problems with different boundary conditions.

Key words: scattering problem, inverse value problem, incident waves, scattering waves, scattering operator.

Принято в редакцию: 18.02.2015 г.
Подписано к печати: 20.04.2015 г.